

### 第三节 金融期权价值评估

#### 3. 多期二叉树模型

如果继续增加分割的期数，就可以使期权价值更接近实际。从原理上看，多期二叉树模型与两期模型一样，从后向前逐级推进，只不过多了个层次。

期数增加以后带来的主要问题是股价上升与下降的百分比如何确定问题。期数增加以后，要调整价格变化的升降幅度，以保证年报酬率的标准差不变。将年报酬率标准差和升降百分比联系起来的公式是：

$$u = 1 + \text{股价上升百分比} = e^{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d = 1 - \text{股价下降百分比} = 1 \div u$$

其中：e = 自然常数，约等于 2.7183；

$\sigma$  = 标的资产连续复利报酬率的标准差；

t = 以年表示的时段长度。

其中：e = 自然常数，约等于 2.7183； $\sigma$  = 标的资产连续复利报酬率的标准差；t = 以年表示的时段长度。

【举例】（1）例题 2 中，已知某期权标的股票报酬率的标准差  $\sigma = 0.4068$ ，该期权的到期时间为 6 个月。则：

$$u = e^{0.4068 \times \sqrt{\frac{1}{2}}} = 1.3333,$$

股价上升百分比 =  $u - 1 = 33.33\%$

$$d = \frac{1}{u} = 0.75,$$

股价下降百分比 =  $1 - d = 25\%$

（2）例题 3 中，把 6 个月的时间分为两期，每期 3 个月。则：

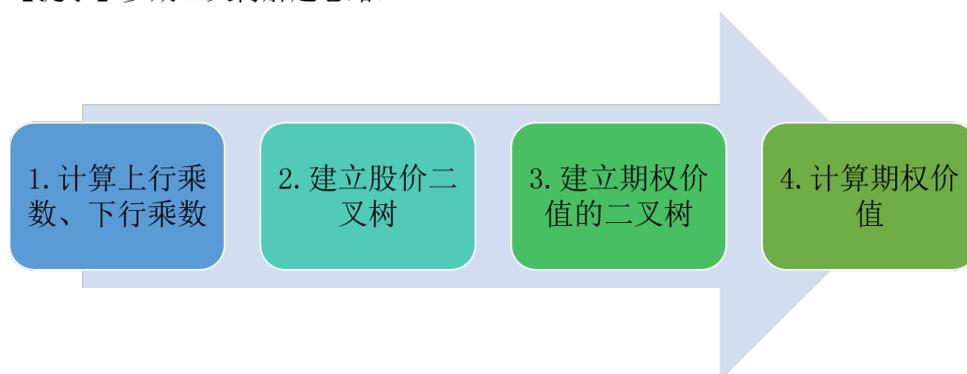
$$u = e^{0.4068 \times \sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.2256,$$

股价上升百分比 =  $u - 1 = 22.56\%$

$$d = \frac{1}{u} = 0.8159,$$

股价下降百分比 =  $1 - d = 18.41\%$

【提示】多期二叉树解题思路：



【例题 4】已知：股票价格  $S_0 = 50$  元，执行价格 52.08 元，年无风险利率 4%，股价波动率（标准差）0.4068，到期时间 6 个月，划分期数为 6 期（即每期 1 个月）。

要求：计算期权价值。

答案：

（1）计算上行乘数、下行乘数

$$u = e^{0.4068 \times \sqrt{1/12}} = e^{0.1174} = 1.1246$$

$$d = 1 \div 1.1246 = 0.8892$$

（2）建立股价二叉树

期数	0	1	2	3	4	5	6
股票	50	56.23	63.24	71.12	79.98	89.94	101.15

价格		44.46	50	56.23	63.24	71.12	79.98
			39.53	44.46	50	56.23	63.24
				35.15	39.53	44.46	50
					31.26	35.15	39.53
						27.8	31.26
							24.72

(3) 建立期权价值的二叉树并计算期权价值

买入 期权 价格	5.3	8.52	13.26	19.84	28.24	38.04	49.07
		2.3	4.11	7.16	12.05	19.21	27.9
			0.61	1.26	2.61	5.39	11.16
				0	0	0	0
					0	0	0
						0	0
							0

①确定第6期的各种价格下的期权价值:

$$C_{u6} = S_{u6} - X = 101.15 - 52.08 = 49.07 \text{ (元)}$$

$$C_{du5} = S_{du5} - X = 79.98 - 52.08 = 27.90 \text{ (元)}$$

$$C_{d2u4} = S_{d2u4} - X = 63.24 - 52.08 = 11.16 \text{ (元)}$$

以下4项的股票价格均低于或等于执行价格,所以期权价值为零。

②确定第5期的期权价值:

$$\text{股价上升百分比} = u - 1 = 1.1246 - 1 = 12.46\%$$

$$\text{股价下降百分比} = 1 - d = 1 - 0.8892 = 11.08\%$$

$$4\%/12 = \text{上行概率} \times 12.46\% + (1 - \text{上行概率}) \times (-11.08\%)$$

$$\text{上行概率 } P = 0.4848$$

$$\text{下行概率 } (1 - P) = 1 - 0.4848 = 0.5152$$

$$C_{u5} = \text{上行期权价值} \times \text{上行概率} + \text{下行期权价值} \times \text{下行概率} / (1 + r) = (49.07 \times 0.4848 + 27.90 \times 0.5152) / [(1 + 4\%/12)] = 38.04 \text{ (元)}$$

$$C_{u4d} = (27.90 \times 0.4848 + 11.16 \times 0.5152) / [(1 + 4\%/12)] = 19.21 \text{ (元)}$$

$$C_{u3d2} = (11.16 \times 0.4848 + 0 \times 0.5152) / [(1 + 4\%/12)] = 5.39 \text{ (元)}$$

以下各项,因为第6期上行和下行的期权价值均为零,第5期价值也为零。

第4、3、2和1期的期权价值以此类推。

(4) 确定期权的现值:

$$\text{期权现值} = (8.52 \times 0.4848 + 2.30 \times 0.5152) / [(1 + 4\%/12)] = 5.3 \text{ (元)}$$

**【提示】**单期的定价模型假设未来股价只有两个可能,对于时间很短的期权来说是可以接受的。若到期时间很长,如例题中的半年时间,就与事实相去甚远。改善的办法是把到期时间分割成两部分,每期3个月,形成两期二叉树,这样就可以增加股价的选择。还可以进一步分割,如果每天为一期,情况就好多了。如果每个期间无限小,股价就成了连续分布,布莱克斯科尔斯模型就诞生了。