

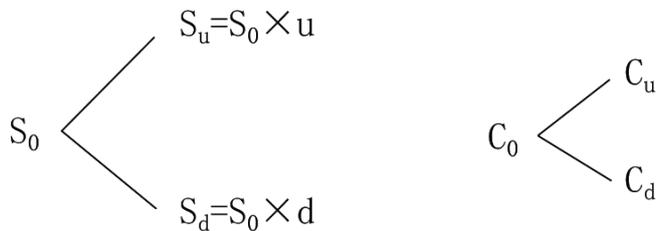
第三节 金融期权价值评估

(二) 二叉树期权定价模型

二叉树模型的假设：

- (1) 市场投资没有交易成本；
- (2) 投资者都是价格的接受者；
- (3) 允许完全使用卖空所得款项；
- (4) 允许以无风险利率借入或贷出款项；
- (5) 未来股票的价格将是两种可能值中的一个。

1. 单期二叉树定价模型



$$C_0 = \frac{\text{上行概率} \times \text{上行时到期日价值} C_u + \text{下行概率} \times \text{下行时到期日价值} C_d}{1+r}$$

$$= \text{上行概率} \times \frac{C_u}{1+r} + \text{下行概率} \times \frac{C_d}{1+r}$$

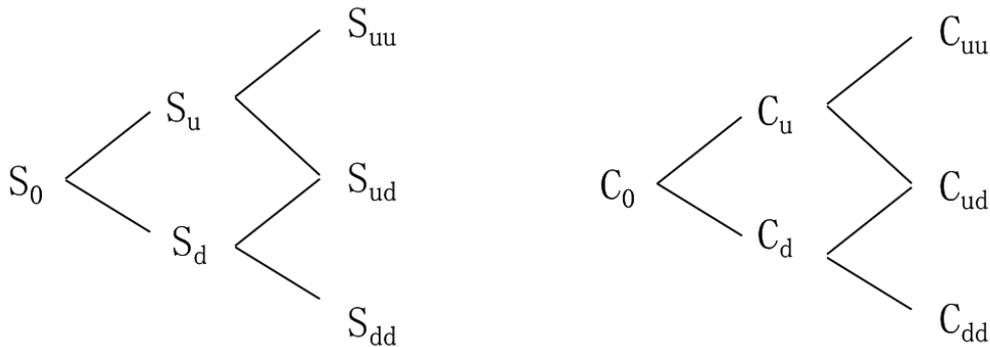
$$= \frac{1+r-d}{u-d} \times \frac{C_u}{1+r} + \frac{u-1-r}{u-d} \times \frac{C_d}{1+r}$$

承上例，根据公式直接计算的期权价格：

$$C_0 = \left(\frac{1+2\%-0.75}{1.3333-0.75} \right) \times \frac{14.59}{1+2\%} + \left(\frac{1.3333-1-2\%}{1.3333-0.75} \right) \times \frac{0}{1+2\%} = \frac{0.27}{0.5833} \times \frac{14.59}{1.02} = 6.62 \text{ (元)}$$

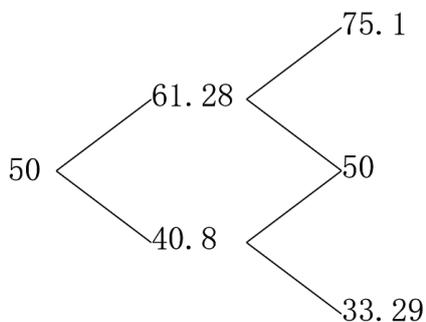
2. 两期二叉树模型

两期二叉树模型是单期模型的两次应用。

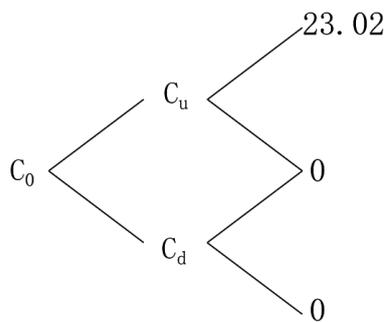


【例题 3】承例题 2，把 6 个月的时间分为两期，每期 3 个月。变动以后的数据如下：ABC 公司的股票现在的市价为 50 元，看涨期权的执行价格为 52.08 元，每期股价有两种可能：上升百分比 22.56% 或下降百分比 18.4%；无风险利率为每 3 个月 1%。

两期二叉树的一般形式如下图所示：



股价二叉树



期权二叉树

(1) 复制原理定价:

$$H = (23.02 - 0) / (75.1 - 50) = 0.91713$$

$$\text{借款} = (50 \times 0.91713) / 1.01 = 45.855 / 1.01 = 45.4 \text{ (元)}$$

3 个月后股票上行的价格是 61.28 元。

$$C_u = \text{投资成本} = \text{购买股票支出} - \text{借款} = 61.28 \times 0.91713 - 45.40 = 10.8 \text{ (元)}$$

由于 C_{ud} 和 C_{dd} 的值均为零，所以 C_d 的值也为零。

$$H = \text{期权价值变化} / \text{股价变化} = (10.8 - 0) / (61.28 - 40.80) = 10.8 / 20.48 = 0.5273$$

$$\text{借款} = (40.8 \times 0.5273) / 1.01 = 21.3008$$

$$C_0 = \text{投资成本} = \text{购买股票支出} - \text{借款} = 50 \times 0.5273 - 21.3024 = 5.06 \text{ (元)}$$

(2) 风险中性原理定价:

$$\text{期望报酬率} = 1\% = \text{上行概率} \times 22.56\% + \text{下行概率} \times (-18.4\%)$$

$$1\% = \text{上行概率} \times 22.56\% + (1 - \text{上行概率}) \times (-18.4\%)$$

$$\text{上行概率} = 0.47363$$

$$\text{期权价值 6 个月后的期望值} = 0.47363 \times 23.02 + (1 - 0.47363) \times 0 = 10.903 \text{ (元)}$$

$$C_u = 10.903 / 1.01 = 10.8 \text{ (元)}$$

$$C_0 = 0.47363 \times 10.8 / 1.01 = 5.06 \text{ (元)}$$

(3) 两期二叉树模型的公式计算

$$C_u = \left(\frac{1+r-d}{u-d} \right) \frac{C_{uu}}{1+r} + \left(\frac{u-1-r}{u-d} \right) \frac{C_{ud}}{1+r}$$

$$C_d = \left(\frac{1+r-d}{u-d} \right) \frac{C_{ud}}{1+r} + \left(\frac{u-1-r}{u-d} \right) \frac{C_{dd}}{1+r}$$

计算出 C_u 和 C_d 后，再根据单期定价模型计算出 C_0 。

根据公式计算期权价值:

$$C_u = \left(\frac{1+1\%-0.8160}{1.2256-0.8160} \right) \times \frac{23.02}{1+1\%} + \left(\frac{1.2256-1-1\%}{1.2256-0.8160} \right) \times \frac{0}{1+1\%} = 10.8 \text{ (元)}$$

$$C_d = 0$$

$$C_0 = 0.47363 \times \frac{10.8}{1+1\%} = 5.06 \text{ (元)}$$