

第三节 金融期权价值评估

(三) 布莱克—斯科尔斯期权定价模型 (BS 模型)

1. 布莱克—斯科尔斯模型的假设

- (1) 在期权寿命期内, 买方期权标的股票不发放股利, 也不作其他分配;
- (2) 股票或期权的买卖没有交易成本;
- (3) 短期的无风险利率是已知的, 并且在期权寿命期内保持不变;
- (4) 任何证券购买者能以短期的无风险利率借得任何数量的资金;
- (5) 允许卖空, 卖空者将立即得到所卖空股票当天价格的资金;
- (6) 看涨期权只能在到期日执行;
- (7) 所有证券交易都是连续发生的, 股票价格随机游走。

2. 布莱克—斯科尔斯模型的公式

$$C_0 = S_0 \times [N(d_1)] - PV(X) \times [N(d_2)]$$

$$\text{或} = S_0 \times [N(d_1)] - X \times e^{-r_c t} \times [N(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/PV(X))}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}$$

$$\text{或} \frac{\ln(S_0/X) + [r_c + (\sigma^2/2)] \times t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

其中:

C_0 = 看涨期权的当前价值;

S_0 = 标的股票的当前价格;

$N(d)$ = 标准正态分布中离差小于 d 的概率;

X = 期权的执行价格;

$e \approx 2.7183$;

r_c = 连续复利的年度的无风险利率;

t = 期权到期日前的时间 (年);

$\ln(S_0/X)$ = S_0/X 的自然对数;

σ^2 = 连续复利的以年计的股票回报率的方差。

【提示】

$$F = P \times e^{r_c t}$$

$e^{r_c t}$ —— 连续复利终值系数

$$\text{【推导】 } F = P \times \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{mt}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{mt} = e^{\ln \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)^{mt}}$$

$$= e^{mt \times \ln \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r_c}{m}\right)} = e^{mt \times \frac{r_c}{m}} = e^{r_c t}$$

$$F = P \times e^{r_c t}$$

$$P = F \times e^{-r_c t}$$

$e^{-r_c t}$ —— 连续复利现值系数

【例题 5】某股票当前价格为 50 元, 执行价格为 52.08 元, 期权到期日前的时间 0.5 年, 每年复利一次的无风险利率 4%, 相当连续复利的无风险利率 $r_c = \ln(1.04) = 3.9221\%$, 连续复利的标准差 $\sigma = 0.4068$, 即方差 $\sigma^2 = 0.1655$ 。

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + [r_c + (\sigma^2/2)] \times t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\ln(50/52.08) + [0.03922 + (0.1655/2)] \times 0.5}{0.4068 \times \sqrt{0.5}} = 0.0703$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = 0.07 - 0.4068 \times \sqrt{0.5} = -0.2174$$

X/σ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

$$d_1 = 0.0703$$

查正态分布下的累积概率[N(d)]表:

当 d=0.07 时, N(d) = 0.5279

当 d=0.08 时, N(d) = 0.5319

$$\frac{0.0703 - 0.07}{0.08 - 0.07} = \frac{N(d_1) - 0.5279}{0.5319 - 0.5279}$$

解得: N(d₁) = 0.528

当 d 为负时, 如 d₂ = -0.2174, 按其绝对值 0.2174 查表。

正态分布下的累积概率[N(d)]表

X/σ	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

当 d=0.21 时, N(d) = 0.5832

当 d=0.22 时, N(d) = 0.5871

$$\frac{0.2174 - 0.21}{0.22 - 0.21} = \frac{N(0.2174) - 0.5832}{0.5871 - 0.5832}$$

N(0.2174) = 0.5861

N(-0.2174) = 1 - [N(0.2174)] = 1 - 0.5861 = 0.4139

N(d₁) = N(0.0703) = 0.528

N(d₂) = N(-0.2174) = 0.4139

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \times [N(d_1)] - X \times e^{-r_c t} \times [N(d_2)] \\ &= 50 \times 0.528 - 52.08 \times e^{-3.9221\% \times 0.5} \times 0.4139 \\ &= 26.4 - 52.08 \times 0.9806 \times 0.4139 = 5.26 \text{ (元)} \end{aligned}$$