

注册会计师

财务成本管理

教材精讲班

(2) 建立股票价格二叉树 (单位: 元)

序号	0	1	2	3	4	5	6
时间 (年)	0	0.083	0.167	0.250	0.333	0.417	0.500
上行乘数	1.1246						
下行乘数	0.8892						
股票价格	50	56.23	63.24	71.12	79.98	89.94	101.15
		44.46	50.00	56.23	63.24	71.12	79.98
			39.53	44.46	50.00	56.23	63.24
				35.15	39.53	44.46	50.00
					31.26	35.15	39.53
						27.80	31.26
							24.72

(3) 按照股票价格二叉树和执行价格, 构建期权价值二叉树 (单位: 元)

序号	0	1	2	3	4	5	6
执行价格							52.08
上行概率							0.4848
下行概率							0.5152
买入期权价格	5.30	8.52	13.26	19.84	28.24	38.04	49.07
		2.30	4.11	7.16	12.05	19.21	27.90
			0.61	1.26	2.61	5.39	11.16
				0	0	0	0
					0	0	0
						0	0
							0

序号	0	1	2	3	4	5	6
执行价格							52.08
上行概率							0.4848
下行概率							0.5152
买入期权价格	5.30	8.52	13.26	19.84	28.24	38.04	49.07
		2.30	4.11	7.16	12.05	19.21	27.90
			0.61	1.26	2.61	5.39	11.16
				0	0	0	0
					0	0	0
						0	0
							0

【计算题】假设 A 公司的股票现在的市价为 40 元。有 1 份以该股票为标的资产的看涨期权，执行价格为 40.5 元，到期时间是 1 年。根据股票过去的历史数据所测算的连续复利报酬率的标准差为 0.5185，无风险利率为每年 4%，拟利用两期二叉树模型确定看涨期权的价格。

要求：（1）若保证年报酬率的标准差不变，股价的上行乘数和下行乘数为多少？

（2）建立两期股价二叉树与两期期权二叉树表（单位：元）；

股价二叉树

时间（年）			
股价二叉树			

期权二叉树

时间（年）			
期权二叉树			

（3）利用两期二叉树模型确定看涨期权的价格。

【解答】

（1）

上行乘数 $u=e^{\sigma\sqrt{t}}=e^{0.5185\times\sqrt{0.5}}=e^{0.3666}=1.4428$

下行乘数 $d=1\div1.4428=0.6931$

（2）

上行乘数 $u=1.4428$

下行乘数 $d=0.6931$

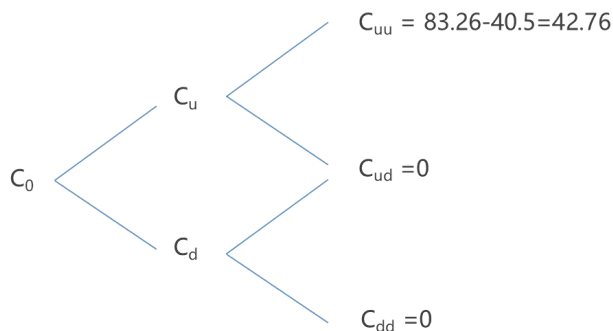
$X=40.5$ 元

股价二叉树

时间（年）	0	0.5	1
股价二叉树	40.00	57.71	83.26
		27.72	39.99
			19.21

期权二叉树

时间（年）	0	0.5	1
期权二叉树	7.81	18.28	42.76
		0	0
			0



(3) 解法 1: 上行概率 = $(1 + \text{无风险利率} - d) / (\text{上行乘数} - \text{下行乘数}) = (1 + 2\% - 0.6931) / (1.4428 - 0.6931) = 0.4360$

解法 2: $2\% = \text{上行概率} \times 44.28\% + (1 - \text{上行概率}) \times (-30.69\%)$

上行概率 = 0.4360

下行概率 = $1 - 0.4360 = 0.5640$

$C_u = (\text{上行概率} \times \text{上行期权价值} + \text{下行概率} \times \text{下行期权价值}) \div (1 + \text{持有期无风险利率})$

$= (0.4360 \times 42.77 + 0.5640 \times 0) / (1 + 2\%) = 18.28$ (元)

$C_d = (\text{上行概率} \times \text{上行期权价值} + \text{下行概率} \times \text{下行期权价值}) \div (1 + \text{持有期无风险利率}) = 0$

期权价格 $C_0 = (0.4360 \times 18.28 + 0.5640 \times 0) / (1 + 2\%) = 7.81$ (元)

(三) 布莱克-斯科尔斯期权定价模型 (BS 模型)

1. 假设

- (1) 在期权寿命期内，买方期权标的股票不发放股利，也不作其他分配；
- (2) 股票或期权的买卖没有交易成本；
- (3) 短期的无风险利率是已知的，并且在期权寿命期内保持不变；
- (4) 任何证券购买者能以短期的无风险利率借得任何数量的资金；
- (5) 允许卖空，卖空者将立即得到所卖空股票当天价格的资金；
- (6) 看涨期权只能在到期日执行；
- (7) 所有证券交易都是连续发生的，股票价格随机游走。

2. 公式

$$C_0 = S_0 [N(d_1)] - X e^{-r_c t} [N(d_2)]$$

$$\text{或} = S_0 [N(d_1)] - PV(X) [N(d_2)]$$

其中：

$$d_1 = \{\ln(S_0/X) + [r_c + \sigma^2/2]t\} / \sigma\sqrt{t}$$

$$\text{或} = \ln[S_0/PV(X)] / \sigma\sqrt{t} + (\sigma\sqrt{t}/2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

式中：

C_0 -看涨期权的当前价值；

S_0 -标的股票的当前价格；

$N(d)$ -标准正态分布中离差小于 d 的概率；

X -期权的执行价格；

e -自然对数的底数，约等于 2.7183；

r_c -连续复利的年度的无风险报酬率；

t -期权到期日前的时间 (年)；

$\ln(S_0/X)$ - S_0/X 的自然对数；

σ^2 -连续复利的以年计的股票回报率的方差。

3.模型参数的估计

(1) 无风险利率的估计

①期限要求：无风险利率应选择与**期权到期日相同**的政府债券利率。如果没有相同时间的，应选择时间最接近的政府债券利率。

②这里所说的政府债券利率是指其市场利率（**根据市场价格计算的到期收益率**），而不是票面利率。

③模型中的无风险利率是按**连续复利**计算的利率，而不是常见的年复利。

连续复利假定利息是连续支付的，利息支付的频率比每秒 1 次还要频繁。

如果用 F 表示终值，P 表示现值， r_c 表示连续复利率，t 表示时间（年）；

则： $F=P\times e^{r_c t}$

即： $r_c=[\ln (F/P)]/t$

【教材例 7-14】假设 t=1 年，F=104 元，P=100 元，则：

$r_c=\ln (104/100) \div 1$

$=\ln (1.04) \div 1$

$=3.9221\%$

每年复利一次的无风险利率 4%，相当连续复利的无风险利率 $r_c=\ln (1.04) =3.9221\%$ 。

【提示】严格来说，期权估值中使用的利率都应当是连续复利，包括二叉树模型和 BS 模型。即使在资本预算中，使用的折现率也应当是连续复利率。

为了简便，手工计算时往往使用分期复利作为连续复利的近似替代。使用分期复利时，也有两种选择：

①按有效年利率折算：

例如：假设有效年利率为 4%，则等价的半年利率为 $\sqrt{(1+4\%)}-1=1.98\%$

②按报价利率折算：

例如，报价年利率为 4%，则半年利率为 $4\% \div 2=2\%$ 。

(2) 报酬率标准差的估计

股票报酬率的标准差可以使用历史报酬率来估计。

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R})^2} \qquad R_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right)$$

R_t -- 连续复利下股票在 t 时期的报酬率。

P_t -- t 期的价格

$P_{(t-1)}$ -- t-1 期的价格

D_t -- t 期的股利

【教材例 7-15】ABC 公司过去 11 年的股价如表 7-13 第 2 列所示，假设各年均没有发放股利，据此计算的连续复利报酬率和年复利报酬率如第 3 列和第 4 列所示。

连续复利与年复利的标准差

年份	股价（元）	连续复利报酬率（%）	年复利报酬率（%）
1	10.00		
2	13.44	29.57	34.40
3	21.33	46.19	58.71
4	43.67	71.65	104.74
5	33.32	-27.05	-23.70
6	32.01	-4.01	-3.93
7	27.45	-15.37	-14.25

8	35.16	24.75	28.09
9	32.14	-8.98	-8.59
10	54.03	51.94	68.11
11	44.11	-20.29	-18.36
平均值	31.51	14.84	22.52
标准差		34.52	43.65

【教材例 7-13】沿用[例 7-10]中的数据，某股票当前价格为 50 元，执行价格为 52.08 元，期权到期日前的时间为 0.5 年。每年复利一次的无风险利率为 4%，相当连续复利的无风险利率 $r_c=\ln(1.04)=3.9221\%$ ，连续复利的标准差 $\sigma =0.4068$ ，即方差 $\sigma^2=0.1655$ 。

【补充要求】

- （1）计算期权的价格；
- （2）利用敏感分析法分析股价、股价的标准差、利率、执行价格和到期时间对于期权价值的影响。

【解析】

$$d_1 = \frac{\ln(50 \div 52.08) + [0.039221 + (0.1655 \div 2)] \times 0.5}{0.4068 \times \sqrt{0.5}} = 0.07$$

$$d_2=0.07-0.4068 \times \sqrt{0.5}=-0.217$$

$$N(d_1) =N(0.07) =0.5280$$

$$N(d_2) =N(-0.217) =0.4140$$

$$C_0=50\times 0.5280 - 52.08 \times e^{-3.9221\%\times 0.5} \times 0.4140$$

$$=26.40-52.08\times 0.9806 \times 0.4140=26.40-21.14=5.26 \text{（元）}$$

根据例 7-10 的资料，采用单期二叉树模型计算的期权价值是 6.62 元，采用两期二叉树模型计算的期权价值是 5.06，采用 6 期二叉树模型计算的期权价值是 5.30 元，采用 BS 模型计算的期权价值是 5.26 元。

期权价值的敏感分析

项目	基准	股价 提高	标准差 增大	利率 提高	执行价格 提高	时间 延长
当前股价（S0）	50	60	50	50	50	50
标准差，年（σ）	0.4068	0.4068	0.4882	0.4068	0.4068	0.4068
连续复利率，年（rc）	3.9221%	3.9221%	3.9221%	4.7065%	3.9221%	3.9221%
执行价格（X）	52.08	52.08	52.08	52.08	62.50	52.08
到期时间，年（t）	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.60
d1	0.0703	0.7041	0.1113	0.0839	-0.5637	0.1029
d2	-0.2173	0.4165	-0.2339	-0.2037	-0.8514	-0.2122
N（d1）	0.5280	0.7593	0.5443	0.5334	0.2865	0.5410
N（d2）	0.4140	0.6615	0.4075	0.4193	0.1973	0.4160
期权价值（C0）	5.26	11.78	6.40	5.34	2.23	5.89
期权价值增长率		123.92%	21.73%	1.58%	-57.55%	11.95%

- （1）当前股票价格：如果当前股票价格提高 20%，由 50 元提高到 60 元，期权价值由 5.26 元提高到 11.78 元，提高 123.92%。可见，期权价值的增长率大于股价增长率。
- （2）标准差：如果标准差提高 20%，期权价值提高 21.73%。可见，标的股票的风险越大，期权的价值越大。
- （3）利率：如果利率提高 20%，期权价值提高 1.58%。可见，虽然利率的提高有助于期权价值的提高，但是期权价值对于无风险利率的变动并不敏感。
- （4）执行价格：执行价格提高 20%，期权价值降低 57.55%。可见，期权价值的变化率大于执行价格的变化率。值

得注意的是，此时期权价值的下降额（ $5.26-2.23=3.03$ ）小于执行价格的上升额（ $62.50-52.08=10.42$ ）。

（5）期权期限：期权期限由 0.5 年延长到 0.6 年，期权价值由 5.26 元提高到 5.89 元。可见，期权期限的延长增加了股票价格上涨的机会，有助于提高期权价值。

4. 看涨期权-看跌期权平价定理

对于欧式期权，假定看涨期权和看跌期权有相同的执行价格和到期日，则下述等式成立：

看涨期权价格-看跌期权价格=标的资产的价格-执行价格的现值

这种关系，被称为看涨期权-看跌期权平价定理，利用该等式中的 4 个数据中的 3 个，就可以求出另外 1 个。

【2013 年·单选题】某股票的现行价格为 20 元，以该股票为标的资产的欧式看涨期权和欧式看跌期权的执行价格均为 24.96。都在 6 个月后到期。年无风险利率为 8%，如果看涨期权的价格为 10 元，看跌期权的价格为（ ）元。

A.6.89 B.13.11

C.14 D.6

【答案】 C

【解析】 $20 + \text{看跌期权价格} = 10 + 24.96 / (1 + 4\%)$ ，所以看跌期权价格=14 元。

5. 美式期权估值

美式期权在到期前的任意时间都可以执行，除享有欧式期权的全部权利之外，还有提前执行的优势。因此，美式期权的价值应当至少等于相应欧式期权的价值，在某种情况下比欧式期权的价值更大。

【例题·多选题】下列有关期权估值模型的表述中正确的有（ ）。

A.BS 期权定价模型中的无风险利率应选择长期政府债券的到期收益率

B.利用 BS 模型进行期权估值时应使用的利率是连续复利

C.利用二叉树模型进行期权估值使用的利率可以是年复利

D.美式期权的价值应当至少等于相应欧式期权的价值

【答案】 BD

【解析】BS 期权定价模型中的无风险利率应选择与期权到期日相同的政府债券到期收益率。严格来说，期权估值中使用的利率都应当是连续复利，包括二叉树模型和 BS 模型。即使在资本预算中，使用的折现率也应当是连续复利。

【计算题】A 公司的普通股最近一个月来交易价格变动很小，投资者确信三个月后其价格将会有很大变化，但是不知道它是上涨还是下跌。股票现价为每股 100 元，执行价格为 100 元的三个月看涨期权售价为 10 元（预期股票不支付红利）

（1）如果无风险有效年利率为 10%，执行价格 100 元的三个月的 A 公司股票的看跌期权售价是多少（精确到 0.0001 元）？

（2）投资者对该股票价格未来走势的预期，会构建一个什么样的简单期权策略？价格需要变动多少（考虑时间价值，精确到 0.01 元），投资者的最初投资才能获利？

【答案】

（1）根据看涨期权-看跌期权平价关系：

看跌期权价格=看涨期权价格-股票现价+执行价格/ $(1+r)^t$

$=10-100+100/(1.10)^{0.25}$

$=-90+97.6454=7.6454$ （元）

（2）购买多头对敲组合，即同时购买以 A 公司股票为标的物的 1 股看跌期权和 1 股看涨期权

总成本=10+7.6454=17.6454（元）

股票价格变动= $17.6454 \times (1.10)^{0.25}=18.07$ （元）

本章小结

