

注册会计师

财务成本管理

教材精讲班

【计算题】假设甲公司的股票现在的市价为 20 元。有 1 份以该股票为标的资产的看涨期权，执行价格为 21 元，到期时间是 1 年。1 年以后股价有两种可能：上升 40%，或者下降 30%。无风险利率为每年 4%。拟利用复制原理，建立一个投资组合，包括购进适量的股票以及借入必要的款项，使得该组合 1 年后的价值与购进该看涨期权相等。

要求：

- (1) 计算利用复制原理所建组合中股票的数量为多少？
- (2) 计算利用复制原理所建组合中借款的数额为多少？
- (3) 期权的价值为多少？
- (4) 若期权价格为 4 元，建立一个套利组合。
- (5) 若期权价格为 3 元，建立一个套利组合。

【答案】(1) 上行股价 = $20 \times (1 + 40\%) = 28$ (元)

下行股价 = $20 \times (1 - 30\%) = 14$ (元)

股价上行时期权到期日价值 = $28 - 21 = 7$ (元)

股价下行时期权到期日价值 = 0

组合中股票的数量 (套期保值率) = $\frac{\text{期权价值变化}}{\text{股价变化}} = \frac{7 - 0}{28 - 14} = 0.5$ (股)

(2) 借款数额 = $\frac{\text{到期日下行股价} \times \text{套期保值率}}{1 + \text{持有期无风险报酬率}} = \frac{14 \times 0.5}{1 + 4\%} = 6.73$ (元)

(3) 期权价值 = 投资组合成本 = 购买股票支出 - 借款 = $0.5 \times 20 - 6.73 = 3.27$ (元)

(4) 由于目前看涨期权价格为 4 元高于 3.27 元，所以存在套利空间。套利组合应为：出售 1 份看涨期权，借入 6.73 元，买入 0.5 股股票，可套利 0.73 元。

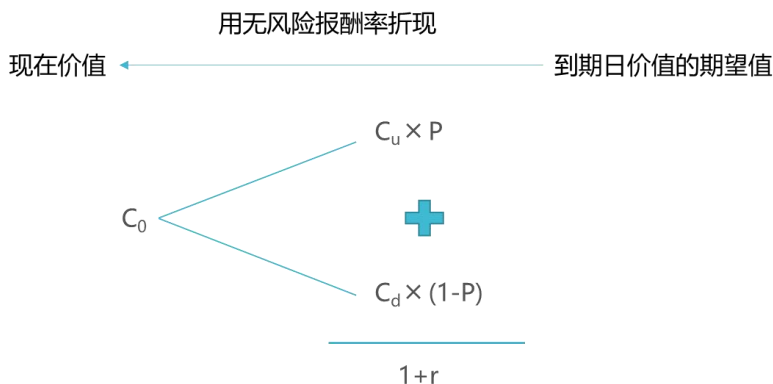
(5) 由于目前看涨期权售价为 3 元低于 3.27 元，所以存在套利空间。套利组合应为：卖空 0.5 股股票，买入无风险债券 6.73 元，买入 1 股看涨期权进行套利，可套利 0.27 元。

2. 风险中性原理 (无套利原理)

(1) 基本思想

假设投资者对待风险的态度是 **中性的**，所有证券的期望报酬率都应当是 **无风险利率**。风险中性的投资者不需要额外的收益补偿其承担的风险。在风险中性的世界里，将期望值用无风险利率折现，可以获得现金流量的现值。

(2) 计算思路



基本公式：

到期日价值的期望值=上行概率× C_u +下行概率× C_d

期权价值=到期日价值的期望值÷（1+持有期无风险利率）

（3）上行概率的计算

期望报酬率（无风险利率）=上行概率×上行时报酬率+下行概率×下行时报酬率

假设股票不派发红利，股票价格的上升百分比就是股票投资的报酬率。

期望报酬率（无风险利率）=上行概率×股价上升百分比+下行概率×（-股价下降百分比）

加 权

（4）计算公式

期权价值=（上行概率×上行期权价值+下行概率×下行期权价值）/（1+持有期无风险利率）=（上行概率× C_u +下行概率× C_d ）/（1+r）

【教材例 7-10 续】

【解析】期望报酬率=2%=上行概率×33.33%+下行概率×（-25%）

2%=上行概率×33.33%+（1-上行概率）×（-25%）

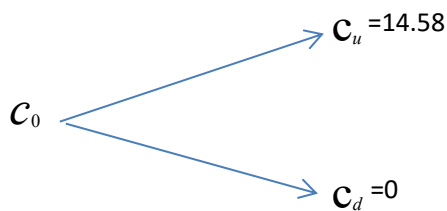
上行概率=0.4629

下行概率=1-0.4629=0.5371

期权 6 个月后的期望价值=0.4629×14.58+0.5371×0=6.75（元）

期权的现值=6.75÷1.02=6.62（元）

【注意】折现用计息期利率



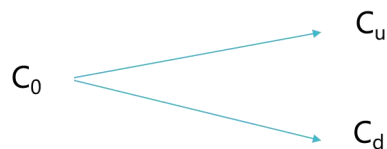
（二）二叉树期权定价模型

单期二叉树定价模型

两期二叉树定价模型

多期二叉树定价模型

1. 单期二叉树定价模型（风险中性原理的应用）



期望报酬率（无风险利率 r）

=上行概率× $\frac{\text{股价上升百分比}}{u-1}$ +下行概率× $\frac{(-\text{股价下降百分比})}{d-1}$

=上行概率×(u-1)+下行概率×(d-1)

上行概率=(r+1-d)/(u-d)

期权价值

=(股价上行期权价值 C_u ×上行概率+股价下行期权价值 C_d ×下行概率)/(1+r)

= C_u ×上行概率/(1+r) + C_d ×下行概率/(1+r)

=上行概率× C_u /(1+r) + (1-上行概率)× C_d /(1+r)

$$\text{期权价格} = \frac{1+r-d}{U-d} \times \frac{C_u}{1+r} + \frac{U-1-r}{U-d} \times \frac{C_d}{1+r}$$

U: 股价上行乘数=1+股价上升百分比

d: 股价下行乘数=1-股价下降百分比

r: 无风险利率(期望报酬率) $r=p \times (u-1) + (1-p) \times (d-1)$

【理解】

风险中性原理的应用

其中:

上行概率= $(1+r-d) / (u-d)$

下行概率= $(u-1-r) / (u-d)$

期权价格=上行概率 $\times C_u / (1+r)$ + 下行概率 $\times C_d / (1+r)$

【教材例 7-10】假设 ABC 公司的股票现在的市价为 50 元。有 1 股以该股票为标的资产的看涨期权，执行价格为 52.08 元，到期时间是 6 个月。6 个月以后股价有两种可能：上升 33.33%，或者降低 25%。无风险利率为每年 4%。

$$\begin{aligned} \text{期权价格} &= \left(\frac{1+2\%-0.75}{1.3333-0.75} \right) \times \frac{14.58}{1+2\%} + \left(\frac{1.3333-1-2\%}{1.3333-0.75} \right) \times \frac{0}{1+2\%} \\ &= \frac{0.27}{0.5833} \times \frac{14.58}{1.02} = 6.62(\text{元}) \end{aligned}$$

【计算题】假设甲公司的股票现在的市价为 20 元。有 1 份以该股票为标的资产的看涨期权，执行价格为 21 元，到期时间是 1 年。1 年以后股价有两种可能：上升 40%，或者降低 30%。无风险利率为每年 4%。

要求：利用单期二叉树定价模型确定期权的价值。

【答案】

$$S_u = S_0 \times (1+g) = 20 \times (1+40\%) = 28$$

$$S_d = S_0 \times (1-g) = 20 \times 0.7 = 14$$

$$C_u = S_u - X = 28 - 21 = 7$$

$$\text{期权价格} = (1+r-d) / (u-d) \times C_u / (1+r) = (1+4\%-0.7) / (1.4-0.7) \times 7 / (1+4\%) = 3.27(\text{元})$$

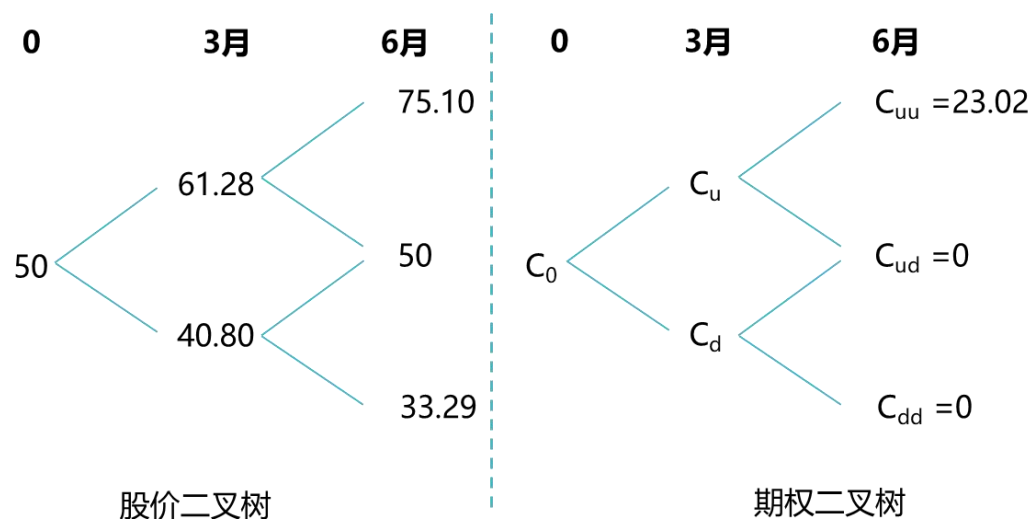
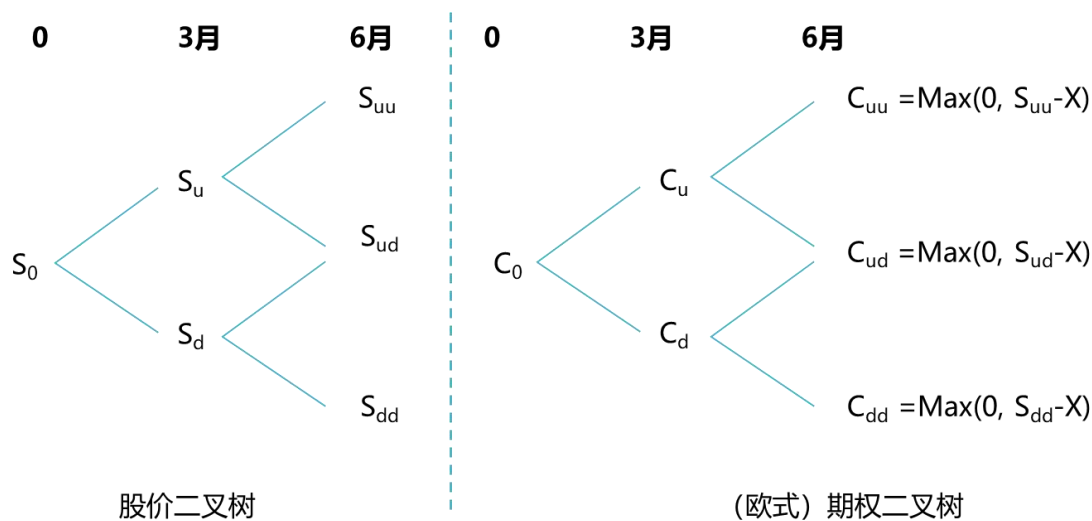
2. 两期二叉树模型

(1) 基本原理：由单期模型向两期模型的扩展，不过是单期模型的两次应用。

【教材例 7-11】继续采用【例 7-10】中的数据，把 6 个月的时间分为两期，每期 3 个月。变动以后的数据如下：ABC 公司的股票现在的市价为 50 元，看涨期权的执行价格为 52.08 元，每期股价有两种可能：上升 22.56%或下降 18.4%；无风险利率为每 3 个月 1%。

(2) 方法:

先利用单期定价模型，根据 C_{uu} 和 C_{ud} 计算节点 C_u 的价值，利用 C_{ud} 和 C_{dd} 计算 C_d 的价值；然后，再次利用单期定价模型，根据 C_u 和 C_d 计算 C_0 的价值。从后向前推进。



$$X = 52.08$$

$$U = 1.2256$$

$$d = 0.816$$

3. 多期二叉树模型

(1) 原理：从原理上看，与两期模型一样，从后向前逐级推进，只不过多了一个层次。

(2) 股价上升与下降的百分比的确定:

期数增加以后带来的主要问题是股价上升与下降的百分比如何确定问题。期数增加以后，要调整价格变化的升降幅度，以保证年报酬率的标准差不变（不能改变自身风险）。

把年报酬率标准差和升降百分比联系起来的公式是：

$$u = 1 + \text{上升百分比} = e^{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d=1-\text{下降百分比}=\frac{1}{n}$$

式中： e 为自然常数，约等于 2.7183； σ 标的资产连续复利报酬率的标准差； t -以年表示的时段长度。

【教材例 7-10】 采用的标准差 $\sigma = 0.4068$

$$U = e^{0.4068 \times \sqrt{0.5}} = e^{0.2877} = 1.3333$$

该数值可以利用函数计算器直接求得，或者使用 Excel 的 EXP 函数功能，输入 0.2877，就可以得到以 e 为底、指数为 0.2877 的值为 1.3333。

$$d = 1 \div 1.3333 = 0.75$$

【教材例 7-12】沿用**【例 7-10】**中的数据，将半年的时间分为 6 期，即每月 1 期。已知：股票价格 $S_0=50$ 元，执行价格为 52.08 元，年无风险利率为 4%，股价波动率（标准差）为 0.4068，到期时间为 6 个月，划分期数为 6 期（即每期 1 个月）。

（1）确定每期股价变动乘数。

$$U=e^{0.4068 \times \sqrt{1/12}}=e^{0.1174}=1.1246$$

$$d=1 \div 1.1246=0.8892$$

【注意】计算中注意 t 必须为年数，这里由于每期为 1 个月，所以 $t=1/12$ 年。